4. Énoncés des exercices

Exercice 12.1 Dans une classe de 35 élèves, le club théâtre (T) compte 10 élèves et la chorale (C) 12 élèves. Dix-huit élèves ne participent à aucune de ces activités. On interroge au hasard un élève de cette classe. Quelle est la probabilité que cet élève :

(a) appartienne au club théâtre ou à la chorale ?

(b) appartienne au club théâtre et à la chorale ?

Exercice 12.2 Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires, toutes indiscernables au toucher.
1) On tire successivement, au hasard, trois boules sans remise. Quelles sont les probabilités des événements :

- A : "Le tirage ne contient aucune boule blanche"
- B : "le tirage contient une seule boule blanche"
- C : "Le tirage contient deux boules blanches"

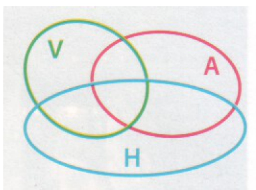
2.a) Même question dans le cas d'un tirage avec remise.
2.b) A-t-on $P(A) + P(B) + P(C) = 1$? Pourquoi ?

Exercice 12.3 Une compagnie d'assurance analyse les contrats souscrits par ses clients. Voici les résultats :

- 72% ont souscrit une assurance Habitation
- 54% ont souscrit une assurance Auto
- 30% ont souscrit une assurance Vie
- 7% ont souscrit les trois types d'assurance
- 25% ont souscrit exactement une assurance Auto et une assurance Habitation
- 31% ont souscrit uniquement une assurance Habitation
- 14% ont souscrit uniquement une assurance Auto

(Tous les clients ont souscrit au moins un contrat parmi les trois cités ci-dessus).

1) Sur un diagramme analogue au diagramme ci-contre, indiquez les différents pourcentages dans les zones qui conviennent.



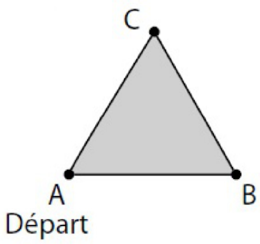
2) La compagnie envoie un courrier à un assuré choisi au hasard. On appelle H l'événement : "l'assuré a souscrit une assurance Habitation", V : "l'assuré a souscrit une assurance Vie", et A : "l'assuré a souscrit une assurance Auto". Identifiez, sur le diagramme, les événements suivants, et calculez leur probabilité.
a) $A \cap V \cap H$; $A \cap V$; $A \cup H$
b) $\overline{H} \cap A$; $\overline{H} \cap \overline{V}$
c) $\overline{A \cup H}$; $\overline{A \cup V}$

3) Décrivez, à l'aide des lettres A, V et H, les événements suivants, puis calculez leur probabilité.

- E : "L'assuré n'a pas souscrit d'assurance Vie, mais il a souscrit une assurance Habitation et une assurance Auto".
- F : "L'assuré a souscrit uniquement une assurance Auto"
- G : "L'assuré a souscrit exclusivement une assurance Auto et une assurance Vie".

Exercice 12.4 On lance quatre fois une pièce de monnaie équilibrée. N est la variable aléatoire donnant le nombre de "face" obtenu. Déterminez la loi de probabilité de N.

Exercice 12.5 Un mobile se déplace sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC. A chaque sommet, il choisit sa direction au hasard. Parti de A, il effectue quatre déplacements. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de passages en A, départ non compris. déterminez la loi de probabilité de X.



Exercice 12.6 Aymeric a oublié le code du cadenas de son ordinateur. Ce code est constitué de quatre chiffres entre 0 et 9. Il ne se souvient que du premier : 2. Il essaie au hasard une combinaison commençant par 2. X désigne la variable aléatoire indiquant le nombre de chiffres bien placés (premier chiffre compris).
1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2) Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 12.7 Dans une enveloppe, on place cinq jetons indiscernables portant les numéros -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2. On tire au hasard un jeton. A chaque jeton, on associe le carré du numéro tiré.
On définit ainsi une variable aléatoire C.
1) Quelle est la loi de probabilité de C ?
2) Calculez l'espérance et la variance de C.

Exercice 12.8 La production journalière de tiges filetées d'un atelier de mécanique est indiquée dans le tableau ci-dessous où l désigne la longueur et d désigne le diamètre, exprimés en mm.

l \ d	15,8	16	16,1	16,3
84	5	9	6	0
85	15	19	21	4
86	12	6	12	7
87	6	7	6	5

On choisit au hasard une tige pour effectuer un test de conformité. L est la variable aléatoire qui indique la longueur de la tige et D, celle qui indique son diamètre.
1) Donnez la loi de probabilité de D.
2) Donnez la loi de probabilité de L.
3) La tige est usinée de nouveau (événements noté U) si l'événement ≪ $L > 85,5$ et $D > 16$ ≫ est réalisé.
La tige est envoyée au rebut (événement noté R) si l'événement ≪ $D > 15,9$ ou $L > 84,5$ ≫ n'est pas réalisé.
Calculez P(U) et P(R).

Exercice 12.9 Patrick, patron d'un chalutier, fait une sortie sur sa zone de pêche. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la présence d'un banc de poissons.
On note B et S les événements suivants :
- B : ≪ Il y a un banc de poissons sur sa zone ≫
- S : ≪ Le sonar détecte la présence de poissons ≫

Une étude statistique sur les sorties dans cette zone et sur la fiabilité du sonar a permis d'établir que :
$P(B) = 0,7$ $P(S) = 0,575$ $P(B \cap S) = 0,56$

1.a) dans le tableau de probabilités ci-contre :
- La probabilité de B est indiquée en bout de ligne ;
- La probabilité de S est indiquée en bas de colonne

	S	$\overline{S}$	
B	0,56		0,7
$\overline{B}$			
	0,575		1

- à l'intersection de la ligne B et de la colonne S, on indique la probabilité de $B \cap S$.

Pour chaque ligne et chaque colonne, la case blanche est la somme des cases grises.
Complétez ce tableau.
1.b) Énoncez l'événement $\overline{B} \cap S$ et donnez sa probabilité.

2) Lors d'une sortie en mer, le pêcheur se trouve dans l'une des situations ci-dessous :
- Situation 1 : un banc est présent et le sonar le détecte, le filet est lancé et la pêche est fructueuse. dans ce cas, le gain est estimé à 2000€.
- Situation 2 : il n'y a pas de banc de poissons, mais le sonar en signale un. Le filet est lancé pour rien. Dans ce cas, on estime la perte à 400€.
- Situation 3 : Le sonar ne détecte rien. Le bateau rentre à quai et on estime la perte à 150€.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique (positif ou négatif) pour une sortie en mer.
a) Donnez la loi de probabilité de X.
b) Patrick effectue de nombreuses sorties ; quel gain moyen peut-il espérer par sortie ?

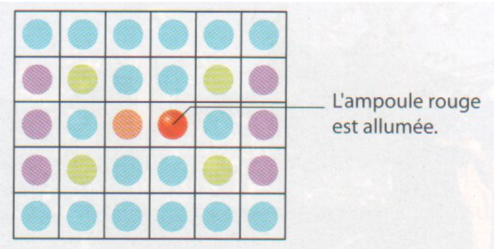
Exercice 12.10 Une salle de spectacles propose pour la saison une carte d'adhérent au prix de 100 €. Elle donne alors droit à un tarif unique de 15€ pour chacun de ses spectacles. Une étude statistique a montré que parmi les abonnés, 9% ont assisté à quatre spectacles, 12% à cinq, 36% à six, 18% à sept et le reste à huit spectacles.

On interroge au hasard un abonné sur le nombre de spectacles N auquel il a assisté.
1) Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire N, puis calculez $E(N)$.
2) On note S la variable aléatoire indiquant la somme déboursée par un abonné par saison.

(a) Quelle relation lie S et N ?

(b) Sur quelle dépense moyenne par abonné peut compter le directeur de la salle ?

Exercice 12.11 Un jeu de hasard est constitué d'un dispositif allumant de façon aléatoire une case, et une seule, d'un tableau lumineux dont les ampoules sont rouges (R), vertes (V), bleues (B) ou violettes (I).



L'exploitant donne au client un jeton, servant à actionner le mécanisme, dont il peut fixer à sa guise la valeur a en euros. Le joueur gagne 80€ si le rouge clignote, 50€ si c'est le vert, rien du tout s'il s'agit du violet, et perd 10 fois la valeur du jeton si c'est le bleu. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique en euros du joueur pour une partie.
1) Trouvez la loi de probabilité de X.
2.a) Calculez a pour que le jeu soit équitable.
2.b) Comment l'exploitant a-t-il intérêt à fixer la valeur a du jeton ?

Exercice 12.12 Une marque de téléphone portable propose deux options sur ses appareils, le GPS (noté G) et le wifi (noté W). Sur l'ensemble de sa gamme, 40% des téléphones possèdent l'option G, 70% l'option W et 24% les deux à la fois. On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque. On suppose que tous les appareils ont la même probabilité d'être choisis.
1.a) Calculez $P(G \cup W)$.
1.b) Déduisez-en la probabilité qu'un téléphone n'ait aucune des deux options.
2) Pour le fabricant, le coût de revient par téléphone de l'option G est de 12€, et celle de l'option W de 6€. On note X la variable aléatoire qui indique ce coût par appareil.
2.a) Déterminez la loi de probabilité de X.
2.b) Calculez $E(X)$.
2.c) Déduisez-en une estimation du coût de revient total de l'équipement de 200 000 appareils dans les mêmes conditions.